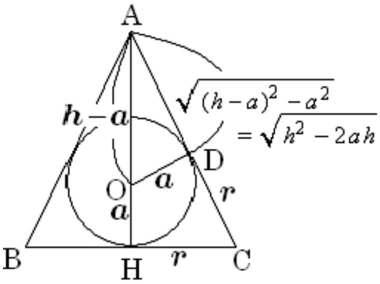
【例３】
半径 a の球に外接する円錐がある．
(1) この円錐の体積の最小値を求めよ．
(2) この円錐の表面積の最小値を求めよ．

（解答）(1) この円錐の高さを h, 底面の円の半径を r とする．また，円錐を，球の中心と底面の円の中心を通る平面で切断したときの断面積は次の図のようになる．



$\triangle OAD$ と $\triangle CAH$ は相似であるので，
$h : \sqrt{h^2-2ah} = r : a$
$\therefore r^2 = \dfrac{a^2h}{h-2a}$
$\left(\text{または},h \text{ について解いて},h = \dfrac{2ar^2}{r^2-1}\right)$
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$
$= \dfrac{\pi}{3}a^2 \cdot \dfrac{h^2}{h-2a}$
$= \dfrac{\pi a^2}{3}\left(h+2a+\dfrac{4a^2}{h-2a}\right)$
$= \dfrac{\pi a^2}{3}\left(h-2a+\dfrac{4a^2}{h-2a}+4a\right)$
上図から明らかに $h > 2a$ なので，相加相乗平均の関係を用いて，
$V \geqq \dfrac{\pi a^2}{3}\left(2\sqrt{(h-2a)\dfrac{4a^2}{h-2a}}+4a\right) = \dfrac{8\pi}{3}a^3$
等号成立は，$h-2a = \dfrac{4a^2}{h-2a}$
すなわち，$h = 4a$ のとき．
(2) この円錐の母線を R とすると，(1) の図より，
$R = \sqrt{h^2-2ah}+r, \quad R > r$
$R - r = \sqrt{h^2-2ah}$

$$\begin{aligned}(R-r)^2 &= h^2-2ah \\ &= \frac{2ar^2}{r^2-a^2}\left(\frac{2ar^2}{r^2-a^2}-2a\right) \\ &= \frac{4a^2r^2}{(r^2-a^2)^2}\end{aligned}$$

$R - r = \dfrac{2ar}{r^2-a^2}$
$\therefore R = \dfrac{r(r^2+a^2)}{r^2-a^2}$
この円錐の表面積を S とすると，
$S = \pi r^2 + \pi R^2 \dfrac{2\pi r}{2\pi R}$
$= \pi r^2 + \pi Rr$
$= \pi r^2 + \pi\dfrac{r^2(r^2+a^2)}{r^2-a^2}$
$= \pi r^2\left(\dfrac{r^2-a^2+r^2+a^2}{r^2-a^2}\right)$
$= \pi r^2\dfrac{2r^2}{r^2-a^2}$
$= \pi\dfrac{2r^4}{r^2-a^2}$
$= 2\pi\left(r^2-a^2+\dfrac{a^4}{r^2-a^2}+2a^2\right)$
図より，明らかに $r > a$ だから，相加相乗平均の関係を用いて，
$S \geqq 2\pi\left(2\sqrt{(r^2-a^2)\dfrac{a^4}{r^2-a^2}}+2a^2\right) = 8\pi a^2$
等号成立は，$r^2-a^2 = \dfrac{a^4}{r^2-a^2}$
すなわち，$r = \sqrt{2}a$ のとき．
補足
(1) では h を，(2) では r を変数とみて解きましたが，これは単なる気まぐれで、どちらを変数とみてもとけます．V を r で表すと，
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot \dfrac{2ar^2}{r^2-1}$
$= \dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{r^4}{r^2-a^2}$
$= \dfrac{2\pi}{3}\left(r^2+a^2+\dfrac{a^4}{r^2-a^2}\right)$
$= \dfrac{2\pi}{3}\left(r^2-a^2+\dfrac{a^4}{r^2-a^2}+2a^2\right)$
となるので，このあと，相加相乗平均の関係を用いれば答えがでます．また，S を h で表すと，
$R = \sqrt{\dfrac{a^2h}{h-2a}}\cdot\dfrac{h-a}{a}$ なので，
$S = \pi r^2 + \pi Rr$
$= \pi\dfrac{a^2h}{h-2a} + \pi\sqrt{\dfrac{a^2h}{h-2a}}\cdot\dfrac{h-a}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2h}{h-2a}}$

$= \pi \dfrac{a^2 h}{h-2a}\left(1+\dfrac{h-a}{a}\right)$
$= \pi \dfrac{a^2 h}{h-2a}\cdot\dfrac{h}{a}$
$= \pi \dfrac{ah^2}{h-2a}$
となって，あとは，帯分数にして相加相乗平均の関係を用いるだけです.

さて，今までに示したやり方で，帯分数にして相加相乗平均の関係を求めるという風に一貫したやり方でやってきました。では，そもそも帯分数にしようとなぜ思うのかというところが肝心です. 高校数学において,「分母の次数が分子の次数より大きいとき，分母の次数を下げてあげる」という一種のテクニックが存在します. これが有効なのが，積分を求めるときです.
たとえば,
$\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$ の値を求めたいとき,

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^2-1} &= x^2+1+\frac{1}{x^2-1}\\ &= x^2+1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\end{aligned}$$

とすれば，積分できる形になります. こうした変形が念頭にあるので，分母の次数が分子より大きければ，とりあえず分母の次数を下げてみるかという発想に至るわけです. この機会に覚えておきましょう.
でもやはり，思いつかないという人もいるはずです. 本問の場合，まだ別にやり方が存在します. (1) でも (2) でも、変数を h にしようが r にしようが，共通する式の特徴が，分母には項が１つしかないという事実です. 最大最小を求める問題において，最終的に分母の項が１つだけのときは，その問題は解けたも同然です. 分母分子を，分母で割るとよいのです.
たとえば，(1) においては,
$V = \dfrac{\pi a^2}{3}\cdot\dfrac{h^2}{h-2a}$
$= \dfrac{\pi a^2}{3}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}2a}$
となります. $\dfrac{1}{h}=t$ とおけば,
$V = \dfrac{\pi a^2}{3}\cdot\dfrac{1}{-2at^2+t}$
となり，結局，$-2at^2+t$ の最大値を求めれば，V の最小値を求めることができることになります. このように，分母が１つの項からなるときは，分母で全体を割ってあげると上手くいきます. この考え方は,「ある関数の最大最小を求めたいときには，変数をなるべくまとめてあげる」という発想から来ています. 本問のように，分母分子に変数が存在しているとき，変数は，分母と分子といういわば別世界に存在していることになります. 別世界の人たちを同時に操るのはなかなか容易ではありません。そこで，同じ世界にお引越しをさせてあげるのです. 実は，この考え方は，いろんなところで使われてます. たとえば，２次関数の最大最小を求める際に，平方完成をしますが，これも変数をまとめるという作業に他なりません.
（例）
$\star f(x) = x^2+6x+8$　←変数が２箇所に存在
$= (x+3)^2-1$　←変数は１箇所のみ！
$\star f(x) = x^3+3x^2+3x$　←変数が３箇所に存在
$= (x+1)^3-1$　←変数は１箇所のみ！
（この式は，特殊な３次関数であれば，数 I の知識で最大最小が分かることを示している！）
$\star f(x) = \sin x + \cos x$
$= \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\star f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2-x+1}$
$= 1+\dfrac{1}{x^2-x+1}$
$= 1+\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$
数 III を習っていれば，商の微分ができるので，いちいちこんなことをしなくても，とにかく微分すれば答えがでてくるわけですが，高等技術を使うまでもない問題は使わずに解いた方が格好良いと思います.